

Didáctica

Valores y conocimiento matemático: la belleza matemática

Inés M. Gómez-Chacón

Resumen

En estos últimos años es reconocida la influencia de la dimensión emocional en el desarrollo del aprendizaje en el aula. Sin embargo, parece necesario un mayor desarrollo de los descriptores básicos: actitudes, emociones, creencias y valores en disciplinas concretas. El artículo aborda el tema de los valores y actitudes de las Matemáticas y de forma específica el valor de la belleza. Se argumenta sobre la importancia del juicio estético como una componente importante en el buen resolutor de problemas, explicitando sus implicaciones para la educación matemática de los estudiantes.

Abstract

In the last few years, the influence of the emotional dimension in the classroom learning development has been recognised. However, there is a need to develop more the basic concepts: attitudes, emotions, beliefs and values in concrete disciplines. This article deals with the values and attitudes of Mathematics, and in particular the value of beauty. It argues on the importance of the aesthetic reasoning as an essential component in the good problem solver, explicitly explaining its implications on the student's education in Mathematics.

“La belleza es la primera señal, pues en el mundo no hay un lugar permanente para las matemáticas feas”

G. H. Hardy¹

Actualmente hay mayor consciencia de la complejidad de la naturaleza de los factores que influyen en el aprendizaje de la matemática de los estudiantes; muestra de ello es el grupo PME (Psychology of Mathematics Education). Si reparamos en la historia de este gru-

¹ HARDY, G. H. (1940) *A Mathematician's Apology*. Traducción española Hernández, J. *Apología de un matemático*. Nivola, 1999, p. 85.

po, al comienzo usaba otro nombre, “Psychology of Mathematical Thinking”, ya que tenía como finalidad solo profundizar en aspectos relativos al pensamiento matemático. Con el tiempo sus finalidades evolucionaron hasta tal punto de modificar su nombre como Psychology of Mathematics Education, dejando la puerta abierta a toda clase de cuestiones relativas a la educación y al estudio de factores de naturaleza compleja que se dan en el aprendizaje.

Son muchos los investigadores que tratan de dar respuesta a esta búsqueda. Una perspectiva significativa para este debate es la que aportan los enfoques de aprendizaje centrados en la dimensión sociocontextual y emocional de los sujetos. En los últimos trabajos (PME, 2004, CERME, 2003; 2004) se ha puesto de relieve la necesidad de trabajar el tema de valores. Este tema se sitúa en el contexto de cuestiones relativas a finalidades y metas del aprendizaje y a la contribución que la matemática puede hacer al desarrollo moral de los estudiantes. En este situar el estado de la cuestión, podríamos decir que, aunque hay deseos de abordar este tema, los trabajos realizados son escasos.

En los estudios sobre la dimensión emocional (actitudes, emociones, creencias) en Matemáticas, que hemos realizado o que otros investigadores han realizado, se ha puesto de manifiesto que los valores de la cultura matemática que los estudiantes vivencian se aprenden de forma implícita e incluso no consciente (Gómez-Chacón, 2000). En muchos casos, los valores que se asocian a las matemáticas no son nada beneficiosos para la formación matemática y personal del alumno. Por ejemplo, basta considerar las opiniones acerca de la naturaleza de las Matemáticas arraigadas en el público en general: «las Matemáticas son: fijas, inmutables, abstractas y no relacionadas con la realidad; un misterio accesible a pocos; una colección de reglas y hechos que deben ser recordados; un conocimiento acultural, nada humanístico, libre de valores, etc”.

Aunque esto forma parte de la imagen social de la Matemática, lo que también está cada vez más claro es que las Matemáticas, además de ser una determinada clase de tecnología simbólica (reglas, conceptos, algoritmos, etc.), también son portadoras, y al mismo tiempo producto, de unos valores determinados. Si sólo pretendemos comprender las Matemáticas como una tecnología simbólica concreta, únicamente comprenderemos una pequeña parte de ellas: de hecho, quizás la menos importante para la educación y para nuestro futuro.

Para desarrollar este artículo se procederá de la forma siguiente: en un primer momento se sitúa brevemente el tema de los valores y

actitudes de las Matemáticas, para pasar seguidamente a centrarnos en la belleza matemática. Se argumentará sobre la importancia del juicio estético como una componente importante en el buen resolutor de problemas, explicitando sus implicaciones para la educación matemática de los estudiantes.

Valores y Actividad Matemática

Me sitúo ante este tema presentando una aproximación no acabada de cara a una articulación en el currículum. Mi intención es nombrar algunos aspectos que deberían tener una consideración explícita en el aula. Ya en el 2000² intenté analizar los procesos de enseñanza en matemáticas de cara a los valores, en orden a mostrar cómo es posible modificar el énfasis que le ponemos -en algunos casos bastante negativo- con objeto de que el estudiante mejore en la comprensión del conocimiento matemático y en el compromiso ético.

El valor se concibe como aquel bien que el hombre ama y que descubre en cuanto le rodea, como merecedor de estima (Cembranos, 1994: 2). Se podría definir como universales o estándares que se van expresando históricamente a través de una acumulación de experiencias significativas para los hombres y mujeres. Tienen una dimensión trascendente: apuntan más allá de la persona misma.

Una de las formas de reconocer la existencia de los valores matemáticos es tratar de dar respuesta a ¿por qué deberíamos enseñar matemáticas a nuestros alumnos? La respuesta varía históricamente y culturalmente. Autores como Mongens Niss (1996) y como Alan Bishop (1988/1999), Miguel de Guzmán (1993, 2000), nos han ayudado a situar esta perspectiva reflexionando sobre las finalidades de la enseñanza de las Matemáticas, contribuyendo de manera decisiva a fijar los propósitos, las metas y las aspiraciones de la enseñanza de las Matemáticas que ofrecemos a nuestros alumnos, así como la forma de percibir, organizar, llevar a cabo y poner en práctica a diario su enseñanza y el aprendizaje.

² La primera vez que abordé este tema fue en la conferencia *Actitudes y valores en el proceso de enseñanza de la Matemática*, Año Mundial de las Matemáticas, actividad organizada por la Sociedad Extremeña de Educación Matemática "Ventura Reyes Prósper", 12 de marzo de 2000, Mérida, Badajoz.

De todos estos estudios sobre finalidades me surgen varias cuestiones ¿Cuáles son los valores que se destacan? ¿Cómo identificarlos? ¿Cómo son reconocidos como tales? ¿Cómo conceptualizarlos?

La maduración en los valores se realiza por medio del proceso de valoración. Por tanto, en primer lugar sería necesario reconocer cómo se desarrolla este proceso de valoración que, en muchos casos, queda expresado por las preferencias o elecciones. Por ejemplo, escogemos las Matemáticas, en vez de la ebanistería, cómo un área de especial relevancia para el individuo porque tiene ciertas cualidades o atributos como conocimiento más importante que el conocimiento de la ebanistería. Habitualmente estas cualidades se manifiestan a nivel social, a nivel institucional, a nivel educativo y a nivel individual: “es importante”, “es la más rechazada”, “es la más difícil”, etc... Muchos de los valores sentidos en el aula proceden de las creencias y valores sobre el conocimiento matemático a nivel social y escolar.

“Además de desarrollar estrategias cognitivas y lingüísticas, los individuos adquieren ‘teorías’ del lenguaje y de la cognición. Aprenden qué tipos de conocimientos son importantes y para qué fines; aprenden la relación entre conocimiento y condición social; aprenden cuáles son las ocasiones adecuadas para adquirir conocimientos y para manifestarlos; y así sucesivamente” (Lancy 183: 208, citado en Bishop, 1999: 86).

Algunos de los valores asociados con las matemáticas

En este apartado se ofrece lo que, en mi opinión, son algunos de los principales valores asociados con las Matemáticas, basando mis argumentos en la documentación histórica y cultural aunque no se expliciten las citas. Dejaré abierta la cuestión de la importancia educativa de estos valores aunque, naturalmente, la retomaré más adelante en apartado siguiente con el valor de la belleza y el juicio estético. Los valores relativos al conocimiento matemático elegidos son el espíritu de la racionalidad, el objetismo, el sentimiento de control y de seguridad, el sentimiento de progreso, la apertura, el misterio y la búsqueda de la verdad.

El espíritu de la racionalidad

Un primer grupo de valores asociados con las Matemáticas tiene que ver con el espíritu de la racionalidad. Desde los tiempos de las

civilizaciones egipcias y helénicas, donde el poder de la razón se empezó a establecer, el racionalismo se ha convertido en una ética primaria. El racionalismo ha sido uno de los principios rectores del desarrollo matemático. Como dijo Kline (1972: 26-27):

“En su aspecto más amplio las matemáticas son un espíritu, el espíritu de la racionalidad. Este espíritu desafía, estimula, vigoriza y dirige las mentes humanas para que den el máximo de sí. Este pretende influir decisivamente en la vida física, moral y social del hombre, pretende responder a los problemas planteados por nuestra existencia misma, se esfuerza por comprender y controlar la naturaleza y hace un gran esfuerzo para explorar y establecer las implicaciones más profundas y extremas del conocimiento ya obtenido” .

La racionalidad requiere de la explicación, de la abstracción y de la teorización. En el área de la Matemática, se dio un interés muy explícito por el razonamiento deductivo como un método válido para alcanzar explicaciones y conclusiones. Racionalizar es intentar fraguar una conexión lógica entre dos ideas que hasta ese momento pueden haber estado desconectadas, o conectadas mediante una incongruencia. Por tanto, cuando criticamos una línea de razonamiento, cuando refutamos una hipótesis, cuando encontramos un contraejemplo, cuando seguimos una línea de razonamiento “hasta su conclusión lógica” y encontramos que está en contradicción con algo que ya sabemos que es cierto, y cuando conciliamos un argumento, estamos siendo guiados por los valores del racionalismo y, al mismo tiempo, también los mantenemos.

Otro aspecto relacionado con la educación y de especial interés para nosotros es el hecho de que el mundo tangible de los objetos materiales no es lógico y que las personas o cosas no son racionales: son las explicaciones. El racionalismo hace referencia directamente a argumentos, inferencias, relatos y explicaciones: el racionalismo sólo se transfiere a personas concretas y objetos mediante la “explicación” de esos fenómenos concretos. Por ejemplo, se considera que una persona sólo se comporta lógicamente si nosotros podemos encontrar una explicación lógica de su comportamiento. Por tanto, la separación entre “objeto” e idea es lo que permite que aflore el racionalismo. Fueron los pitagóricos y los platónicos quienes establecieron la importancia de la distinción entre objeto e idea que condujo a centrarse en las abstracciones como “materiales” de las descripciones y las explicaciones. Este valor ofrece las posibilidades y las potencialidades de la abstracción a una cultura. Además de va-

lorar la lógica, también debemos aceptar el poder de la abstracción y de operar con ideas. De hecho, en el contexto matemático se valora también “teorizar” como una dimensión que nos permite alcanzar mejores horizontes. Teorizar no tiene la connotación que se le atribuye en otros contextos de falta de realidad.

Por último, deseo reseñar que el racionalismo tiene una dimensión estética. Existe cierta belleza en la compleción y la coherencia de un argumento lógico, cuando “se atan los cabos sueltos”, cuando la “ambigüedad” y la imprecisión son reemplazadas por la claridad y la certidumbre, cuando los claroscuros y la imprecisión de las medias verdades se iluminan con la clara luz de la razón. Buscamos consistencia y cohesión, y reaccionamos ante la inconsistencia de un razonamiento como si fuera un desafío a nuestro buen juicio.

Objetismo (las ideas sobre objetos)

Es evidente que el racionalismo ha sido una fuerza impulsora, pero no menos influyente ha sido otro conjunto de valores complementarios, los denominados en la línea del “objetismo”, en un intento de caracterizar una visión del mundo dominada por imágenes de objetos materiales.

Las matemáticas favorecen una visión de la realidad más objetiva que subjetiva. Las ideas son esencialmente ideas sobre objetos. Somos conscientes de que las matemáticas se ocupan de abstracciones y de que en el nivel escolar se dedica un enorme esfuerzo a desarrollar lo que se suele denominar “pensamiento abstracto”. Lo que ahora es especialmente importante es que nos demos cuenta de que, en las matemáticas, el poder de “convertir en objetos” esas abstracciones es lo que permite que se puedan manejar con tanta precisión.

Además, la red de conexiones lógicas desarrollada con ideas matemáticas mediante demostraciones, extensiones, ejemplos, contraejemplos, generalizaciones y abstracciones ayuda a darles significado objetivo y, en consecuencia, permite *abordarlas como si fueran objetos*. El lenguaje del “sí”, “supongamos” y el tiempo verbal potencial también fuerzan una realidad imaginada en el nivel consciente y, de ese modo, permite que sea manipulada *como si fuera* una realidad objetiva. Por lo tanto, además de animar a los alumnos a desarrollar su capacidad para abstraer, también debemos fomentar en ellos las maneras de concretar y “convertir en objetos” las ideas abstractas. El vehículo más importante para esto es nuestro rico repertorio de símbolos.

El racionalismo pone énfasis en la lógica del razonamiento, pero el objetismo dio a las matemáticas la base intuitiva para la búsqueda de los “átomos” del razonamiento.

El sentimiento de control y seguridad

Ahora quiero centrarme en lo que Bishop, citando a White, denomina el “componente sentimental”. Esta expresión se ocupa de los sentimientos y actitudes en la cultura matemática. Explicitaremos dos: el de control y seguridad y el de progreso.

Las matemáticas, a través de la ciencia y la tecnología ofrecen un sentimiento de control y seguridad. Cuando las matemáticas se entienden y se dominan se provocan en el sujeto unos fuertes sentimientos de control, seguridad e incluso dominio. Esto no sólo se aprende “desde dentro” de las matemáticas mediante los algoritmos, las reglas, los procedimientos y los criterios que, cuando se siguen, tendrán *necesariamente* unos corolarios dados; también se aprende en relación con el mundo externo en el sentido de que se puede ver que los fenómenos “obedecen” leyes derivadas de las matemáticas.

Mientras que otras materias del currículo escolar sólo ofrecen opiniones “autorizadas”, relatos contradictorios o pruebas dudosas basadas en ejemplos selectivos, la seguridad ofrecida por el conocimiento Matemático es, sin duda, muy grande.

Los griegos buscaron primero una interpretación matemáticas del universo entero y postularon el diseño matemático de la naturaleza. Desde entonces el diseño ha tenido mucho que ver con el control del entorno, y el diseño matemático ofrece un instrumento infinitamente generalizable, una potente tecnología simbólica para controlar el entorno y, en consecuencia, cierta seguridad en nuestro mundo siempre cambiante.

Sin embargo, el control es un arma de doble filo, porque para controlar algo el propio comportamiento también se debe modificar. Autores como Guzmán, Davis y Hersh³ lo han puesto de manifiesto en sus reflexiones sobre la matematización de la cultura.

³ DAVIS, P. y HERSH, R. (1989) *El sueño de Descartes. El mundo según las Matemáticas*. Mec- Labor: Barcelona.

GUZMÁN, M. DE. “Los riesgos del ordenador en la Enseñanza de la Matemática”, En Manuel ABELLANAS y Alfonsa GARCÍA (Eds.), *Actas de las Jornadas sobre Enseñanza experimental de la Matemática en la Universidad*, Universidad Politécnica de Madrid, 10,11 y 12 de diciembre de 1991, pp. 9-27. (<http://www.mat.ucm.es/deptos/am/guzman/riesgosordenador/riesgoordenador.html>).

Sentimiento de progreso

Está vinculado a los sentimientos de crecimiento, de desarrollo, de cambio, y el primer aspecto importante de este valor es que lo desconocido se puede llegar a conocer. El estudiante puede comprender este sentimiento tras desarrollar, por ejemplo, un algoritmo para resolver un problema determinado; es muy revelador saber que, *como consecuencia*, se podrán solucionar otros problemas. A partir de ese descubrimiento, pronto se desarrolla la idea de que realmente podemos abordar problemas “desconocidos” y tratar de encontrar maneras de resolverlos. Las abstracciones de las Matemáticas permiten llevar a cabo esta generalización desde un problema “conocido” hasta otro “potencialmente soluble”.

Por ejemplo, en la enseñanza secundaria nos encontramos con temas como las fracciones, los números negativos, ¡que no se comportan como deberían! No sólo podemos multiplicar determinados números entre sí y conseguir un resultado menor que cualquiera de los dos, sino que también podemos restar algo ¡y conseguir una resta mayor que los números de partida! Lo que entonces aprendemos es que, como esto son las matemáticas, todo este caos aparente acabará organizado, estructurado y, en consecuencia, explicado, de manera que el conocimiento nos volverá a ofrecer seguridad. Esto es el progreso matemático experimentado personalmente.

Las ideas matemáticas están abiertas al cambio. Una característica asociada al progreso es el reconocimiento y la apreciación de alternativas. Hoy en día, en las matemáticas este espíritu es muy fuerte: definiciones, procedimientos, algoritmos, axiomas, demostraciones, todos son capaces de una rica variación y la exploración de alternativas es una fuente poderosa de nuevas investigaciones. Hoy en nuestra sociedad el espíritu alternativo parece estar muy vivo.

Uno de los objetivos principales de la enseñanza de la matemática es enseñar a los estudiantes a dudar, a averiguar, a descubrir, a ver alternativas y, lo más importante de todo, construir nuevas perspectivas y convicciones. Todo ello está a la raíz de lo creativo.

Apertura

Este valor, valor sociológico, se refiere a las relaciones existentes entre las personas y en el interior de las instituciones sociales, desde la perspectiva del conocimiento matemático.

Al expresar “apertura” nos referimos al hecho de que las verdades, las proposiciones y las ideas matemáticas en general, están abiertas al examen de cualquier persona.

Es evidente que las matemáticas no se consideran una parte de nuestra cultura sometida a opiniones. Las opiniones son mantenidas por determinadas personas, mientras que las matemáticas se ocupan de “hechos”, como el teorema de Pitágoras, que se puede comprobar una y otra vez en cualquier escuela y seguirá siendo cierto. Uno de los triunfos de los griegos es que desarrollaron las técnicas de articulación y demostración en las matemáticas. No les bastaba con creer que algo era cierto: tenían que ser capaces de mostrar que era cierto, es decir, que se podría comprobar abiertamente. Por lo tanto, los principios matemáticos son verdaderos y conforman un conocimiento abierto y seguro. No caducan, no dependen de un partido político, no varían de un país a otro, son universales.

Para mí, el corolario más importante de esta idea es que el conocimiento matemático está abierto a todos y “pertenece” a todos. Podemos convencernos *nosotros mismos* de que un principio matemático es cierto: nadie tiene que persuadirnos *porque los hechos hablan por sí mismos*. Si realizamos los procedimientos correctos y seguimos las reglas, la lógica hará el resto. La misma lógica de las matemáticas nos persuadirá de que las conclusiones son ciertas. Por eso los profesores insisten en que el alumno debe demostrar y explicar por qué una verdad matemática lo es, en vez de limitarse a aceptar razones como *parece que es correcto*.

Esto permite que no estemos presos de la autoridad de determinadas personas. Las personas tenemos libertad para preguntar, para crear alternativas y para buscar soluciones racionales a los problemas de nuestra vida. Sin embargo, de nuevo hay que destacar que lo que tiene una importancia fundamental es la articulación y la demostración en forma de declaración. Las matemáticas exigen, invitan y fomentan el valor de la apertura y (en este caso) también convierten la “independencia” en un objeto, formalizándolo en una declaración. Formalizar algo significa darle forma, sea un teorema, un principio, un algoritmo o una demostración, para que no siga estando implícito y oculto y, quizá como consecuencia de ello, para que sea aceptable. Formalizar algo hace que una idea sea explícita, hace que sea un objeto abierto a la crítica y al análisis objetivo y, en consecuencia de ello, para que sea compartible.

Por muy atractiva que sea una visión del mundo guiada por la racionalidad, el progreso y la apertura como canon para el estilo de

vida del individuo, la realidad de las interacciones sociales es muy distinta. La emoción, las costumbres sociales, la historia, los intereses creados, la política y las atracciones y los rechazos interpersonales, tienen un poder propio que la racionalidad y la apertura del conocimiento matemático quizás no sean capaces de desafiar en nuestra sociedad. No obstante, el imperativo educativo es claro en matemáticas.

Misterio y búsqueda de la verdad

El sometimiento a la verdad y a la realidad, que está normalmente tan enraizado en el científico, constituye sin duda uno de los rasgos importantes que deberíamos apreciar y estimular en todos nosotros. La Matemática estimula a la búsqueda de la verdad, a la aceptación de la verdad, sea quien sea el que la haya encontrado y contradiga o no nuestras expectativas previas, es uno de los rasgos de generosidad que se dan en el trabajo matemático.

El intento de matematización de la realidad ha conducido a la mente, tras el trabajo de muchos siglos, al convencimiento de que el quehacer propio de la Matemática es una actividad necesariamente abierta, *inagotable*, en el sentido de que nunca puede darse por concluida. El sentimiento de profunda humildad ante la multitud de verdades aún por descubrir es otra de las actitudes interesantes que la matemática puede estimular. En este sentido la Matemática se relaciona con el misterio, con la apertura a la trascendencia, la percepción del infinito. En algunos de los matemáticos que más han reflexionado sobre el sentido profundo de su ciencia se percibe una apertura hacia la trascendencia que no les parece en absoluto estar en contradicción con su quehacer matemático, sino incluso puede ser se fundamenta en ella misma. Algunos artículos que se pueden consultar a este propósito son los de Guzmán (1998)⁴ y Cañón (2004)⁵.

⁴ GUZMÁN, M. DE (1998). "Matemáticas y estructura de la naturaleza". En F. MORA TERUEL y J. M^º SEGOVIA DE ARANA (coordinadores) *Ciencia y Sociedad. Desafíos del conocimiento ante el tercer milenio* (Fundación Central Hispano, Ediciones Nobel, Oviedo, 1998) pp. 329-357.

⁵ CAÑÓN, C. (2004) "Lo nuestro es lo infinito", *UNO, Revista de Didáctica de las Matemáticas*. Monográfico Filosofía y matemáticas, vol. 37, pp. 8-24.

La belleza matemática

En las últimas décadas, se han dado grandes progresos en la comprensión de los mecanismos subyacentes, en variedad de dominios y tareas, en el proceso de resolución de expertos y novatos. Las investigaciones realizadas han aportado luz sobre cómo los expertos tienen una mejor organización y almacenamiento de conocimientos específicos y de su aplicabilidad a la resolución de problemas en la disciplina. Además, los expertos tienen un sistema de representación más flexible y disponible. La aportación más significativa de este tipo de estudios es ofrecer un modelo significativo de tendencias y competencias que caracterizan la pericia en la resolución de problemas. En este artículo quiero reseñar la importancia del juicio estético como una componente importante en la persona que sabe resolver los problemas.

Trataré de identificar algunos principios estéticos que parece subyacen en el juicio del experto. Estos principios estéticos tienden a considerar unas componentes afectivas y emocionales.

En este apartado se realiza un breve recorrido sobre distintas perspectivas clásicas sobre el tema: Poincaré, Hadamard, Krutetskii. En la siguiente sección se presentan algunos ejemplos de actividades ilustradoras de la influencia y el rol del juicio estético que se pueden desarrollar en el aula.

Factores estéticos en la resolución de problemas matemáticos

A lo largo de la historia de la Matemática son muchos los testimonios que confirman la existencia de un verdadero placer estético en la creación y contemplación matemática. Por ejemplo, Kline (1962) sugiere que la estética es uno de los diversos elementos que dan dirección a la actividad matemática. La perspectiva de Kline incorpora consideraciones prácticas, científicas, filosóficas y artísticas sobre lo que conlleva el deseo ante el reto intelectual. David y Hersh (1981), en su popular libro *Experiencia Matemática*, han considerado el carácter estético de la actividad matemática profesional. En esa misma década, Miguel de Guzmán (1983)⁶ analizó el origen de la belle-

⁶ “Algunos aspectos insólitos de la actividad matemática”. Artículo publicado en *Investigación y Ciencia*, Febrero 1983, pp. 100-108

za matemática desde una perspectiva clásica y presentó algunas fuentes de gozo estético de distintos hechos matemáticos.

A principios de siglo, Poincaré (1946) y Hadamard (1945) sugieren que la emoción estética es una guía durante la actividad de descubrimiento que capacita al matemático a hacer elecciones (bien conscientes o inconscientes) sobre qué dirección tomar. Krutetskii (1976) sugiere que la evaluación estética de la elegancia de un problema es un comportamiento común entre los estudiantes más capaces matemáticamente. Un fundamento común, en estas observaciones es que los principios de belleza pueden servir como un filtro a través del cual pasa la actividad matemática. A continuación pasamos a examinar con más detalle las perspectivas de Poincaré, Hadamard y Krutetskii.

Poincaré: La emoción estética

Henri Poincaré, uno de los mejores matemáticos del siglo pasado, se interesó en el proceso de creación y de invención matemática. Para él crear consistía precisamente “no en construir las combinaciones inútiles, sino en construir las que son útiles y que están en ínfima minoría. Crear es discernir, es escoger...”⁷. En la perspectiva de Poincaré, la generación de ideas fructíferas era el resultado del trabajo consciente, pero la elección final era debida al trabajo inconsciente y no puramente intelectual, el que está basado en sentimiento estético: “el sentimiento de belleza matemática, de la armonía de los números y las formas, de la elegancia geométrica.” (p. 17). Sólo si una combinación de ideas apela al sentimiento estético puede ser reconocido desde el consciente como idea luminosa para la resolución: “Esta armonía es a la vez una satisfacción para nuestras necesidades estéticas y una ayuda para la mente, a la que sostiene y guía. Y al mismo tiempo, al colocar ante nuestros ojos un conjunto bien ordenado, nos hace sentir una ley matemática...” (p. 17).

Poincaré argumenta que la sensibilidad estética es una característica que distingue a los matemáticos de los no matemáticos. Sugiere que a veces una iluminación repentina puede abocar en una buena combinación o una combinación incorrecta. El verdadero ma-

⁷ POINCARÉ, H (1948) “La creación Matemática”. En KLINE, M. *Matemáticas en el mundo moderno*. Blume, Madrid, 1974, pp. 14-17.

temático puede detectarla guiado por sus razonamientos estéticos y su sentimiento de elegancia matemática.

Así se expresa H. Poincaré en su obra *La Valeur de la Science*: “Más allá de la belleza sensible, coloreada y sonora, debida al centelleo de las apariencias, única que el bárbaro conoce, la ciencia nos revela una belleza superior, una belleza inteligible únicamente accesible, diría Platón, ‘a los ojos del alma’, debida al orden armonioso de las partes, a la correspondencia de las relaciones entre ellas, a la eurytmia de las proporciones, a las formas y a los números. El trabajo del científico, que descubre las analogías entre dos organismos, las semejanzas entre dos grupos de fenómenos cualitativamente diferentes, el isomorfismo de dos teorías matemáticas, es semejante al del artista”.

Hadamard: Inconsciente y conscientes elecciones estéticas

Jacques Hadamard (1945) se interesó en el rol de los sentimientos de belleza en la invención matemática y en la evolución de las ideas del subconsciente. Hadamard coincidió con Poincaré en que las componentes más importantes de la invención ocurren de forma inconsciente y tienen un carácter estético. Afirmó que el trabajo consciente seguido de un periodo intermedio de trabajo no consciente conduce a la inspiración. Durante este periodo de incubación, el inconsciente trabaja en el problema, y cuando una combinación se produce ésta llama a la sensibilidad estética, y nuevamente las ideas pasan al consciente. Hadamard afirma que la frontera entre el consciente y el inconsciente no es nítida, produciéndose movimientos de ida y vuelta. Aunque Hadamard usa los términos consciente e inconsciente para describir el proceso, hay autores que lo ponen en relación con el lenguaje moderno utilizado en la psicología cognitiva (Silver y Metzger, 1989), que hace referencia a la memoria a corto y a largo plazo. Una persona toma la información en la memoria a corto término (consciente), y las conexiones se hacen en la memoria a largo plazo sin atención al proceso (inconsciente).

Hadamard está en desacuerdo con el uso de la técnica de investigación “brainstorming” (lluvia de ideas), como comprensión del proceso de incubación y de iluminación, dado que la información en el inconsciente durante el proceso de incubación puede permanecer totalmente desconocida al sujeto y porque en una corta cantidad de tiempo el sujeto que trabaja no tiene tiempo para incubar todo lo que ocurre. El análisis y las objeciones de Hadamard son casi idénticos a

las teorías más recientes de procesamiento de la información, que han confirmado la dificultad de la persona para acceder a la información que no está disponible en la memoria a corto plazo de trabajo. Y también las referidas al pensamiento discursivo, pensamiento intuitivo.

De acuerdo a Hadamard, la sensibilidad estética conduce no sólo a las elecciones inconscientes que dirigen el descubrimiento matemático, sino también a elecciones más generales acerca de la dirección de la investigación que se persigue.

Considerando ampliamente la perspectiva de Hadamard, nos podría sugerir que cualquier elección hecha mientras se resuelve un problema puede ser un ejemplo de una sensibilidad estética a lo largo del trabajo. Es probablemente más razonable y productivo reconocer que la influencia de los sentimientos de belleza es algo más complejo. Desde nuestro punto de vista, algunas elecciones se hacen sin una influencia estética, bajo consideraciones más prácticas de la mente. Lo que sí podríamos concluir es que los sentimientos estéticos marcan dirección e interactúan con las metas personales y del problema, configurando así el comportamiento del resolutor.

Krutetskii: la elegancia en la solución

El especialista soviético en psicología de la Matemática Krutetskii (1976), al igual que Poincaré y Hadamard resalta el gran valor de los sentimientos de belleza y estéticos en la actividad matemática. Este autor enfatiza su impacto en la evaluación de soluciones encontradas. En sus observaciones de los estudiantes destaca la mirada a las soluciones elegantes Krutetskii (1976: 347). Las características que él observa en los estudiantes y que denomina “elegancia” son la claridad, la simplicidad y la economía.

Este autor señala las siguientes componentes de la capacidad matemática:

1. Una capacidad para extraer la estructura formal del contenido de un problema matemático y para operar con ella.
2. Una capacidad para generalizar a partir de resultados matemáticos.
3. Una capacidad para operar con símbolos, incluyendo los números.
4. Una capacidad para conceptos espaciales, exigidos en ciertas ramas de las matemáticas.
5. Una capacidad de razonamiento lógico.

6. Una capacidad para abreviar el proceso de razonamiento.
7. Una capacidad para ser flexible al pasar de un enfoque a otro, incluyendo tanto la evitación de la fijación como la capacidad de invertir el curso del pensamiento.
8. Una capacidad para lograr claridad, simplicidad, economía y racionalidad en las argumentaciones y pruebas matemáticas.
9. Una buena memoria para el conocimiento y las ideas matemáticas.

Señala que la “capacidad matemática es una mezcla de inteligencia general, imaginación visual, destreza para percibir configuraciones numéricas y espaciales y para retener tales consideraciones”. La define como “las características psicológicas individuales... que responden a las exigencias de la actividad matemática escolar y que influyen en el éxito del dominio creativo de las matemáticas como materia escolar, sobre todo en un dominio relativamente rápido, fácil y hondo de conocimiento, las destrezas y los hábitos en matemáticas”.

Krutetskii pone bastante atención no sólo a las reacciones emocionales positivas, sino también a las negativas generadas por falta de elegancia a la hora de evaluar una solución (Krutetskii, 1976: 284 y 286), reflexionando en cómo ayudar a los estudiantes desarrollar estos sentimientos de cara a llegar a ser mejores resolutores.

El rol estético en la resolución de problemas

De la discusión precedente podemos deducir dos roles importantes en los expertos en resolución de problemas:

1. Guía en la toma de decisiones en la resolución de problemas, sugerido por Poincaré y Hadamard.
2. Evaluación de la elegancia de una solución, sugerida por Krutetskii.

Ambos roles se podrían clasificar dentro de los aspectos reguladores y de evaluación de la actividad matemática. Una característica importante es la componente afectiva destacada por Poincaré con el término “emoción estética” y por Krutetskii como “sentimientos de satisfacción o disgusto ante una solución elegante”.

De estas consideraciones se deriva un gran reto para nosotros, los educadores matemáticos. Hay matemáticos como Miguel de Guzmán (1983) que apuestan por una educación entre los más jóvenes del placer estético de forma adecuada: “... Pero este mismo placer estético en la contemplación matemática se da, en menor grado naturalmente, en

todos aquellos a quienes se les presentan adecuadamente los hechos y métodos más salientes de la matemática elemental. Por supuesto que el goce estético de la matemática se encuentra en el mundo de la armonía intelectual, y así su percepción requiere una preparación inicial tanto mayor cuanto más elevado sea el objeto que se presenta.

Por otra parte, así como el placer que pueden proporcionar la pintura y la música, dirigidas a nuestros sentidos, al menos de modo inmediato, es perceptible hasta cierto grado con una contemplación más o menos pasiva, el placer estético de la matemática exige sin duda un grado de participación activa mucho más intenso. En el mundo de la matemática, para gozar del objeto bello que se presenta, es necesario crearlo o recrearlo, de tal modo que el goce estético aquí presente es comparable más bien con el de hacer música, cantar, danzar, pintar, fabular...”.

Es importante tratar de educar en estos valores en el ámbito de la enseñanza obligatoria y del bachillerato. De acuerdo con Miguel, yo propondría como medios: “la consideración de la matemática más allá de la mera técnica, el conocimiento de la historia de la matemática, el conocimiento y lectura de las obras de los grandes matemáticos, la aceptación bien explícita y consecuente de las responsabilidades que implican el saber y el quehacer matemático ante nosotros mismos, ante los más jóvenes, ante la sociedad en la que vivimos”.

Aspectos didácticos o ideación de materiales. Algunos ejemplos

Miguel de Guzmán, en el 2000, comentando los objetivos del Año Mundial de las Matemáticas (AMM2000) nos decía “La matemática es bella en sí misma, un monumento mucho más perenne que el bronce e incluso, como la mejor música, mucho más universal que las producciones literarias, aunque su belleza, ‘tan sólo asequible a los ojos del alma’, en frase de Platón, no se alcanza sin cierto esfuerzo que nos la haga connatural y familiar”.

Sí, coincido con esta afirmación: no se alcanza sin cierto esfuerzo. Por tanto, para el cultivo de ciertos valores generados por el conocimiento matemático es necesario cuidar nuestros métodos didácticos. El profesor es portador de valores y mediador en los valores. En el caso primero porque su propia educación matemática le ha hecho desarrollar actitudes, creencias y valores. Es mediador en los valores porque con su rol favorece que los alumnos compartan y desarrollen las ideas matemáticas.

Como portador de valores actúa como referencia. Por ejemplo, al expresar su concepción y creencias acerca de la matemática, al elegir temas y actividades, al manifestar sus actitudes. Es importante que el profesor sea consciente de estos efectos, y del currículum oculto que brinda a los estudiantes.

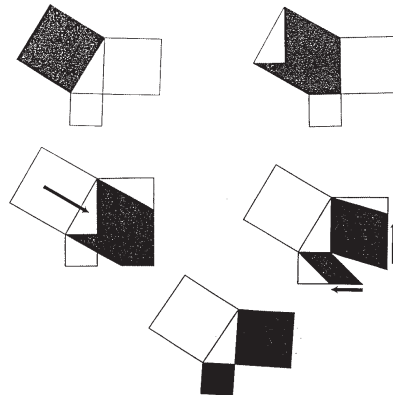
Parece necesario que el profesorado tome iniciativas de cara a la explicitación de valores en el aula. Alguna de las estrategias que puede utilizar es en la selección de los problemas a través de los cuales se señalen unos cuantos elementos de belleza, componente típica de la actividad matemática. O bien, como hemos reseñado en la discusión anterior, al subrayar a través de determinados problemas, los dos roles que aporta el juicio estético en los expertos en resolución de problemas: el de guía en la toma de decisiones en la resolución de problemas y el de la evaluación de la elegancia de una solución.

Veamos algunos ejemplos.

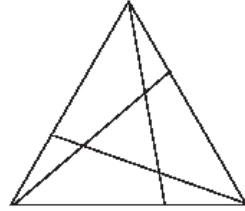
Ejemplo 1: Contemplación inmediata de una verdad

Un elemento estético presente muchas veces en la creación matemática consiste en la posibilidad de una contemplación descansada e inmediata de una verdad profunda, inesperada y llena de implicaciones. Como ejemplo de la matemática elemental puede citarse la demostración, que no requiere palabras, del teorema de Pitágoras o la demostración visual de algunos teoremas geométricos:

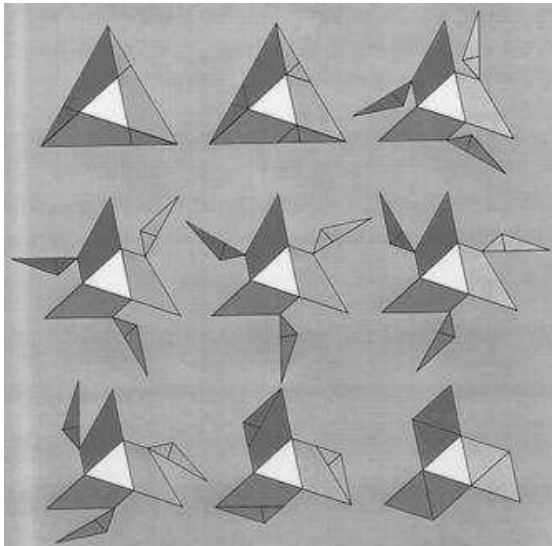
Teorema de Pitágoras: En 1945, el matemático americano Beravalle publicó esta bonita demostración del teorema de Pitágoras.



Triángulo equilátero: Dispones de un triángulo equilátero. Si se traza el segmento que une cada uno de los vértices con el punto que marca la tercera parte del lado opuesto. ¿Qué relación existe entre el área del triángulo equilátero que se forma en el centro y el área del triángulo original? Justifícalo.



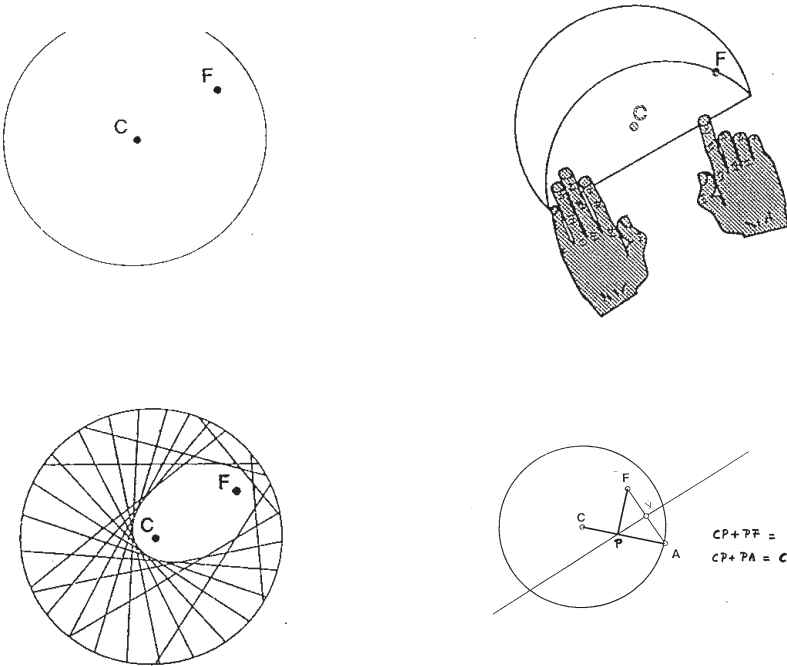
Cuya demostración visual es



Ejemplo 2: El orden intelectual

Un tipo de belleza matemática consiste en el orden intelectual que ante hechos aparentemente inconexos comienza a aparecer. Todo el objeto contemplado aparece en conexión y la unidad lo invade. Entes aparentemente diversos que surgen en contextos diferentes resultan ser el mismo o estar ligados por una estructura armoniosa. La contemplación fácil de esta unidad inesperada es sin duda una de las fuentes de gozo estético de muchos hechos matemáticos.

Por poner un ejemplo tomado de la geometría elemental, consideremos cómo surgen las cónicas mediante la sección de un cono circular recto por un plano o en una construcción con papiroflexia de una elipse:



Ejemplo 3: Ampliación de perspectivas

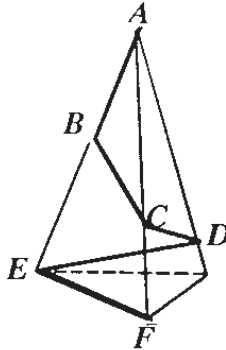
Otro tipo de gozo matemático consiste en la realización de una ampliación de perspectivas con la que de una visión parcial se llega a la contemplación total de un objeto mucho más esplendoroso, en el que nuestro cuadro inicial queda englobado ocupando su lugar justo. En la teoría de los números podemos encontrar muchos ejemplos:

Números naturales consecutivos: Toma cuatro números naturales consecutivos y multiplícalos, ¿Qué observas?

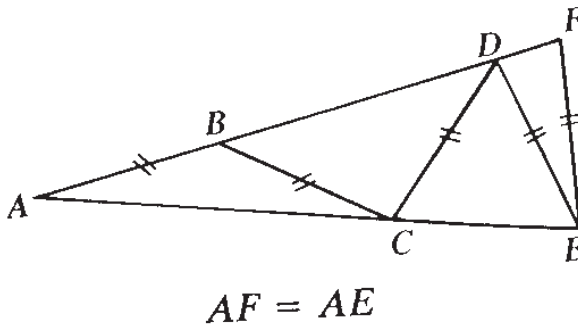
O el problema siguiente: *La pirámide regular y la chinche*

Una chinche se pasea desde el vértice de una pirámide regular. El recorrido que realiza es el señalado en la figura. El camino, formado

por distintos segmentos, cumple la siguiente propiedad: que $AB = BC = CD = DE = EF$. Encuentra la medida del ángulo del vértice de cada uno de los tres triángulos isósceles que constituyen las caras de la pirámide regular.



Una forma de resolver este problema es reducir el problema al caso del plano, cambiar de perspectiva, es decir, “plegar” la pirámide de tal manera que forme la figura:



En este caso el enunciado del problema sería: Dado un triángulo isósceles AEF ($AF = AE$) y en el que hay trazado un camino formado por 5 segmentos congruentes A-B-C-D-E-F. Encontrar la medida del ángulo A.

A través de este cambio de perspectiva la obtención del resultado es fácil y es $A = 20^\circ$.

A modo de conclusión

En este artículo he tratado de nombrar algunos valores asociados al conocimiento matemático. He dado prioridad a la reflexión sobre el placer estético y la determinación desde la perspectiva de algunos autores de las características que debe ofrecer un hecho matemático para que se pueda calificar como bello y para que favorezca el ser un mejor resolutor de problemas. La belleza matemática parece incluir cualidades tales como seriedad, generalidad, profundidad, inevitabilidad, economía de pensamiento, transparencia, sobriedad, adecuación... y parafraseando a Platón, es tan sólo asequible a los ojos del alma. Ahora bien, he deseado poner de manifiesto que el descubrimiento de esta belleza “a los ojos del alma” no se alcanza sin cierto esfuerzo que la haga connatural y familiar a los estudiantes. He considerado importante poner de relieve que profesor es portador de valores y mediador en los valores matemáticos.

En el proceso de aprendizaje de matemáticas se conforman ideas y significados, no sólo conductas o técnicas. Una educación centrada en técnicas no desarrolla una comprensión detallada de los fenómenos. Necesitamos muchas menos técnicas y más comprensión profunda de la “manera de conocer” de las Matemáticas. Quizás esta forma de abordar los conocimientos escolares anime a muchos más estudiantes a disfrutar con esta disciplina y a modificar sus afectos hacia ella.

Enero 2005

Referencias

- BISHOP, A. (1999) *Enculturación matemática. La educación matemática desde una perspectiva cultural*. Barcelona: Paidós (original de 1988).
- CEMBRANOS, C. (1994) *La educación en valores a través del desarrollo curricular y de la tutoría* Monografías IEPS, nº 18.
- CERME 3, (2003) “Thematic Working Groups: Affect and mathematical thinking”, J. Evans (Coord.) *Third Conference of the European Society for Research in Mathematics Education*, 28 February - 3 March 2003 in Bellaria, Italy.
- DAVID Y HERSH (1981) *The mathematical experience*. Boston: Birkhäuser. (Traducción castellana Labor-MEC, 1988).

- GÓMEZ-CHACÓN, I. M. (2000) *Matemática emocional. Los afectos en el aprendizaje matemático*. Madrid: Narcea.
- GUZMÁN, M. DE (1993). *El pensamiento matemático, eje de nuestra cultura*. Discurso inaugural de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Madrid. Policopiado.
- GUZMÁN, M. DE (2000) “Lecciones pitagóricas para el siglo 21” y “Ethical aspects in the mathematical activity” (3ECM, *Third European Congress of Mathematicians*).
- GUZMÁN, M. DE (2000) *Pensamientos en torno al quehacer matemático*. CD-Rom.
- HADARMAD, J.(1945) *The psychology of invention in the mathematical field*. Princeton: Princeton University Press.
- KLINE,M. (1962) *Mathematics: A cultural approach*. Reading. MA: Addison-Wesley.
- KLINE,M. (1972) *Mathematics in Western Culture*, Pelican, Londres (Traduc. Cast. Matemáticas en el mundo moderno, Madrid, Hermann Blume, 1974).
- KRUTETSKII, V. A. (1976) *The psychology of mathematical abilities in schoolchildren*. Chicago: University of Chicago Press.
- NISS, M. (1996) “¿Por qué enseñamos matemáticas en la escuela?” En L. PUIG y J. CALDERÓN, *Investigación y didáctica de las matemáticas*. Ministerio de Educación y Ciencia. CIDE.
- PME, 2004, *Proceedings 28th International Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, PME28 in Bergen, Norway 14 - 18 July.
- POINCARÉ, H. (1963) *Ciencia y método*. Madrid: Espasa-Calpe. (versión original 1944).
- POINCARÉ, H. (1912) *Valeur de la Science*. Paris: E. Flammarion.
- SILVER Y METZGER, (1989) “Aesthetic Influence on Expert Mathematical Problem Solving”, En D. B. MCLEOD & V. M. ADAMS (Eds.) *Affect and mathematical problem solving: A new perspective*. New York: Springer Verlag. pp. 59-74.